Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas IV (MA2115)
Abr-Jul 2025
1^{er} Examen Parcial (30 %)

Solución

Pregunta 1. Dado $p > 0$, sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión cuyos elementos satisfacen la fórmula de recurrencia

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{p}{a_n}\right)$$

con a_1 cualquier número real positivo.

i. **(2 ptos.)** Suponiendo que la sucesión es convergente, halle el valor del límite $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

ii. **(3 ptos.)** Demuestre que la sucesión $\{a_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente.

Solución: Suponiendo que la sucesión converge a L, y notando que $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$, se tiene

$$\begin{aligned} L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{p}{a_n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + \frac{p}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(L + \frac{p}{L}\right) \end{aligned}$$

Luego,

$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{p}{L}\right) \quad \Longrightarrow \quad L^2 = p \quad \Longrightarrow \quad L = \sqrt{p}$$

descartamos el caso $L = -\sqrt{p}$ pues a_{n+1} es positivo siempre que a_n también lo sea y como $a_1 > 0$ entonces todos los a_n son positivos.

Por otra parte, como

$$a_{n+1} - a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{1}{2}\left(a_{n+1} + \frac{p}{a_{n+1}}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left(\frac{(a_{n+1})^2 - p}{a_{n+1}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{a_{n+1} + \sqrt{p}}{a_{n+1}}\right)(a_{n+1} - \sqrt{p}) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{a_{n+1} + \sqrt{p}}{a_{n+1}}\right)\left(\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{p}{a_n}\right) - \sqrt{p}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{a_{n+1} + \sqrt{p}}{a_{n+1}}\right)\left(\frac{(a_n)^2 + p - 2a_n\sqrt{p}}{2a_n}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{a_{n+1} + \sqrt{p}}{a_{n+1}}\right)\left(\frac{\left(a_n - \sqrt{p}\right)^2}{2a_n}\right) \\
&= \frac{1}{4}\underbrace{\left(\frac{a_{n+1} + \sqrt{p}}{(a_{n+1})(a_n)}\right)}_{>0}\underbrace{\left(a_n - \sqrt{p}\right)^2}_{\geq 0} \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $\left\{a_{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona decreciente. Entonces,

$$0 < a_{n+1} \leq a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{p}{a_1}\right)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que la sucesión $\left\{a_{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada. Así, la sucesión $\left\{a_{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente por ser monótona y acotada.

Pregunta 2. (4 ptos. c/u) Determine, para cada una de las siguientes series, si converge o diverge:

i. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2 - n + 3}{n^3 + 2n}$

ii. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \sqrt{n}}{2n^3 - 1}$

iii. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2 + 3}$

iv. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\arctan(n)}}{n^2 + 1}$

Solución: Para las series en (i) (ii) y (iii) estudiaremos la convergencia empleando el Criterio de Comparación del Límite, mientras que para la serie en (iv) usaremos el Criterio de la Integral.

i. Dado que $\dfrac{4n^2 - n + 3}{n^3 + 2n} > 0$ y $\dfrac{1}{n} > 0$ para todo $n \geq 1$, y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{4n^2 - n + 3}{n^3 + 2n}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{n^2}}{1 + \dfrac{2}{n^2}} = 4 > 0$$

como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (pues es la serie armónica) entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2 - n + 3}{n^3 + 2n}$ también diverge.

ii. Dado que $\dfrac{n + \sqrt{n}}{2n^3 - 1} > 0$ y $\dfrac{1}{n^2} > 0$ para todo $n \geq 1$, y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n + \sqrt{n}}{2n^3 - 1}}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}}{2 - \dfrac{1}{n}} = \frac{1}{2} > 0$$

como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (pues es la serie p con $p = 2 > 1$) entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \sqrt{n}}{2n^3 - 1}$ también converge.

iii. Dado que $\dfrac{\ln(n)}{n^2 + 3} > 0$ y $\dfrac{1}{n^{3/2}} > 0$ para todo $n \geq 2$, y

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\ln(n)}{n^2 + 3}}{\dfrac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2} \ln(n)}{n^2 + 3} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2} \ln(n)}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \overset{\substack{\text{L'H} \\ \downarrow}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$$

como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (pues es la serie p con $p = \frac{3}{2} > 1$)

entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2+3}$ también converge.

iv. Dado que la función $f(x) = \dfrac{e^{\arctan(x)}}{x^2+1}$ cumple con lo siguiente:

- f es continua y positiva sobre el intervalo $[1, \infty)$
- $f(n) = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$
- f es decreciente en $[1, \infty)$ pues $f'(x) = \underbrace{\dfrac{e^{\arctan(x)}}{(x^2+1)^2}}_{>0} \underbrace{(1-2x)}_{\substack{<0 \\ (\text{si } x > 1/2)}} < 0$

y como $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\, \mathrm{d}x$ converge, ya que

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{e^{\arctan(x)}}{x^2+1}\, \mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} e^{\arctan(b)} - e^{\arctan(1)} = e^{\pi/2} - e^{\pi/4},$$

entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\arctan(n)}}{n^2+1}$ también converge.

Pregunta 3. (5 ptos.) Halle el intervalo de convergencia de la serie de pontencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{2^n (3n-1)}$$

Solución: Denotando por a_n al n-ésimo término de la serie, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^n (3n-1)}{(-1)^n (x-1)^n} \frac{(-1)^{n+1} (x-1)^{n+1}}{2^{n+1} (3(n+1)-1)} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(3n-1)(x-1)}{2(3n+2)} \right| = \frac{1}{2} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{3 - 1/n}{3 + 2/n} \right) |x-1| = \frac{|x-1|}{2}$$

de donde se desprende que la serie converge para todo $x \in (-1, 3)$ ya que

$$\frac{|x-1|}{2} < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |x-1| < 2 \quad \Longleftrightarrow \quad -1 < x < 3$$

- Si $x = -1$, la serie es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-2)^n}{2^n (3n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n} 2^n}{2^n (3n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \cdots$$

  la cual diverge pues es de términos positivos y al hacer la comparación del límite con la serie armónica se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3n-1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{3} > 0$$

- Si $x = 3$, la serie es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2)^n}{2^n (3n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{11} - \frac{1}{14} + \cdots$$

  la cual converge pues es una serie alternante $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ con $a_n > a_{n+1} > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Por lo tanto, el intervalo de convergencia de la serie de potencias dada es $(-1, 3]$.

Pregunta 4. (4 ptos.) Represente la serie de Maclaurin, para $x \in (-1, 1)$, de la función

$$\operatorname{arcsen}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$$

Solución: Como $-t^2 \in (-1,1)$ siempre que $t \in (-1,1)$, usando la fórmula para la serie binomial, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} &= \Big(1+(-\,t^2)\Big)^{-1/2} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \left(-\,t^2\right)^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} t^{2n} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}\, t^{2n}
\end{aligned}$$

ya que $\displaystyle\binom{-1/2}{0} = 1$, y para $n \geq 1$ se tiene

$$\begin{aligned}
\binom{-1/2}{n} &= \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}-1\right)\left(\frac{-1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{-1}{2}-(n-1)\right)}{n!} \\
&= (-1)^n \, \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+(n-1)\right)}{n!} \\
&= (-1)^n \, \frac{(1)(1+2)(1+4)\cdots\big(1+2(n-1)\big)}{2^n\, n!} \\
&= (-1)^n \, \frac{(1)(3)(5)\cdots\big(2n-1\big)}{2^n\, n!} \\
&= (-1)^n \, \frac{(1)(2)(3)(4)(5)(6)\cdots\big(2n-1\big)(2n)}{\underbrace{2^n(1)(2)(3)\cdots(n)}_{=(2)(4)(6)\cdots(2n)}\; 2^n\, n!} \\
&= (-1)^n \, \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}
\end{aligned}$$

Luego, integrando término a término,

$$\begin{aligned}
\operatorname{arcsen}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} &= \int_0^x \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}\, t^{2n}\right) \mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2\,(2n+1)}\, x^{2n+1}
\end{aligned}$$

para todo $x \in (-1,1)$.